

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРИ РОЗТЯГУВАННІ СМУГИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН, ЯКІ ВИХОДЯТЬ З ТРИКУТНИХ КОНЦЕНТРАТОРІВ

Ю. Боднар, к.т.н.

Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: смуга, система крайових тріщин, розтяг, метод R-функцій, метод Рітца, поліноми Чебишева.

Методом R-функцій досліджується напружено-деформований стан пружної смуги з періодичною системою крайових тріщин, які виходять з вершин трикутних концентраторів.

Постановка проблеми. У багатьох роботах, розглядаючи тіла з тріщинами, обмежуються визначенням коефіцієнта інтенсивності напружень. Водночас існують задачі, зокрема для побудови прикладних методів розрахунку армованих елементів будівельних конструкцій, коли корисно мати повну картину напружено-деформованого стану. Часто в конструктивних елементах тріщини виникають у місцях концентрації напружень. Тому актуальними є задачі про визначення напружено-деформованого стану тіл з тріщинами, які виходять з концентраторів.

Постановка завдання. Нашим завданням є дослідження методом R-функцій напружено-деформованого стану пружної смуги із системою крайових тріщин, які виходять з трикутних концентраторів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо осьовий розтяг на нескінченності силами F пружної смуги висотою $2H$ з періодичною системою прямолінійних, перпендикулярних до осі крайових тріщин довжиною l , які виходять із вершин трикутних концентраторів глибиною b та кутом β (рис. 1).

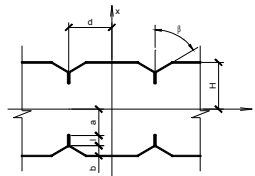


Рис. 1. До постановки задачі.

Задача зводиться до граничної на періодичному елементі Ω між сусідніми тріщинами, тобто до визначення переміщень $u(x,y)$, $v(x,y)$, які задовольняють рівняння Ламе і граничні умови:

$$\begin{aligned} u_n(x,y) &= \delta, \quad \tau_n(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega_1 \\ \sigma_n(x,y) &= 0, \quad \tau_n(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

де $\partial\Omega$ — границя періодичного елемента, u_n — переміщення, нормальне до $\partial\Omega$; σ_n , τ_n — напруження, нормальні і дотичні до границі $\partial\Omega$; $\partial\Omega_1$ — частина границі періодичного елемента на продовженні тріщин; $\partial\Omega_2$ — решта границі періодичного елемента.

Задачу розв'язуватимемо структурно-варіаційним методом [1]. Структуру розв'язку поставленої задачі, тобто такі вирази для $u(x,y)$, $v(x,y)$, які визначені всередині області і містять деякі невідомі функції, за довільного вибору яких точно задовольняються граничні умови, беремо у вигляді, запропонованому в роботі [2]. Для врахування особливостей розв'язку у вершинах тріщин використовуємо точний розв'язок задачі про тиск штампа на півплощину \mathcal{V}_m, u_m [3].

Невідомі функції Φ_1, Φ_2 подаємо у вигляді розкладів по поліномах Чебишева з вибором степенів відповідно до симетрії задачі:

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^n c_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}, \quad \Phi_2 = \sum_{k=1}^m c_k^{(2)} \varphi_k^{(2)},$$

$$\varphi_k^{(1)}(x, y) = T_{2i+1} \left[\frac{x}{H} \right] T_{2j} \left[\frac{y}{d} \right],$$

$$\varphi_k^{(2)}(x, y) = T_{2i} \left[\frac{x}{H} \right] T_{2j+1} \left[\frac{y}{d} \right],$$

де $k = (i+j+1)(i+j+2) - i$, $i+j=0, 1, 2, \dots$

$T_i(t)$ — поліноми Чебишева [5].

У результаті мінімізації квадратичного функціоналу [4] отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно параметрів c_j

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} a_{ij} c_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n+m+1),$$

де

$$c_j = \begin{cases} c_j^{(1)} & j = 1, \dots, n \\ c_j^{(2)} & j = n+1, \dots, n+m+1. \end{cases}$$

Коефіцієнти a_{ij} , b_i цієї системи дорівнюють

$$a_{ij} = \iint_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega;$$

$$b_i = \iint_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right\} d\Omega +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \right\} d\Omega,$$

де

$$\begin{aligned}
f_i &= \tilde{\varphi}_i^{(1)} + \omega \left[- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right] + \\
&+ \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(T_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right) \right] + \\
&+ \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$(i \leq n + m), \quad f_{n+m+1} = \tilde{u};$$

$$\begin{aligned}
\psi_i &= \tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} + \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 T_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right] + \\
&+ \omega \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right] - \\
&- \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(T_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_i^{(1)} = \omega_1 \varphi_i^{(1)}, \quad \tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} = \omega_1 \varphi_{i-n}^{(2)},$$

$$u_0 = \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1(\tilde{v}) - D_1^{(2)}(\tilde{v}) \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1(\tilde{v}) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1^{(2)}(\tilde{v}) \right];$$

$$v_0 = \tilde{v} + \omega \left[- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 D_1(\tilde{v}) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 D_1(\tilde{v}) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(T_1(\tilde{v}) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} T_1^{(2)}(\tilde{v}) \right) \right];$$

$$\tilde{u} = \frac{y+d}{2d} u_m(x, d-y) - \frac{y-d}{2d} u_m(x, d+y);$$

$$\tilde{v} = \frac{y+d}{2d} v_m(x, d-y) + \frac{y-d}{2d} v_m(x, d+y);$$

$D_1, D_2, D^{(2)}_1, D^{(2)}_2$ – диференціальні оператори [2].

Нормалізовані рівняння границі періодичного елемента ($\partial\Omega$) $\omega(x, y)=0$ і його ділянок ($\partial\Omega_i$) $\omega_i(x, y)=0, (i=1,2)$ будемо, використовуючи систему R-функцій [1]:

$$\begin{aligned}
\omega &= (g_1 \wedge_0 g_2) \wedge_{0.9} (g_5 \wedge_0 g_6), \quad \omega_1 = g_1 \vee_0 g_3, \quad \omega_2 = \omega \vee_0 g_3 \\
g_1 &= \frac{1}{2d} (d^2 - y^2), \quad g_2 = \frac{1}{2H} (H^2 - x^2), \quad g_3 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2), \quad a = H - l,
\end{aligned}$$

$$g_5 = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{2\xi_1}, \quad g_6 = \frac{\xi_1^2 - \xi_3^2}{2\xi_1},$$

$$\xi_1 = \cos \beta + \sin \beta - b \sin \beta, \quad \xi_2 = y \cos \beta - x \sin \beta, \quad \xi_3 = y \cos \beta + x \sin \beta.$$

Висновки. На основі запропонованої математичної моделі проведено числові розрахунки.

Результати розрахунків для $d=1$, $H=1$, $\lambda=0,57692$, $\mu=0,38462$, $b=0,3$, $\beta=\pi/3$ наведені на рис. 2, 3.

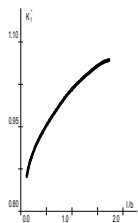


Рис. 2. Коефіцієнт K_1^* за різних співвідношеннях l/b .

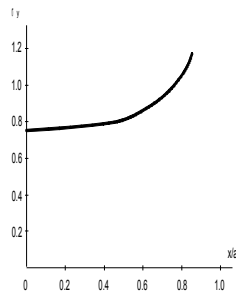


Рис. 3. Напруження на продовженні тріщини.

На рис. 2 наведено графік залежності K_1^* ($K_1^* = 2K_1 H / (F \sqrt{\pi l})$) від відношення l/b при $\beta=\pi/3$. На рис. 3 наведено нормальні напруження на продовженні тріщини.

Бібліографічний список

1. Рвачев В. Л. Метод функций в задачах теории упругости и пластичности / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон. – К. : Наук. думка, 1990. — 216 с.
2. Боднар Ю. І. Наближене розв'язування задач теорії тріщин методом R-функцій / Ю. І. Боднар, М. С. Синекон // Доп. АН України. – 1994. – № 4. – С. 45 – 48.
3. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье / И. Н. Снеддон. – М. : ИЛ, 1966. – 667 с.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
5. Пашковский С. Вычислительное применение многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

Боднар Ю. Напряженно-деформированное состояние при растяжении полосы с периодической системой трещин, выходящих из треугольных концентраторов

Методом R-функций исследуется напряженно-деформированное состояние упругой полосы с периодической системой краевых трещин, исходящих из вершин треугольных концентраторов.

Ключевые слова: полоса, система краевых трещин, растяжение, метод R-функций, метод Ритца, полиномы Чебышева.

Bodnar Ju. Tensely-deformed state at the stretch of bar with the periodic system of cracks thewho go out from three-cornered cuts

The task about tension of bar with the periodic system of regional cracks by structure-variation method.

Key words: bar, system of regional cracks, wricked, method R-functions, method Rittsa, polynomials Chebisheva.